15/11/19

4° Κεφάλαιο

Ειδικές Διακριτές τ.μ και Κατανομές

1) Δοκιμές Bernoulli - Διωνυμική κατανομή:

Θεωρούμε ΤΠ με 2 δυνατά αποτελέσματα → Επιτυχία (Ε), → Αποτυχία (Α)

π.χ συμμετοχή σε εξετάσεις.

Θεωρούμε ΤΠ που

Δ1) Αποτελούνται από έναν προκαθορισμένο αριθμό n-επαναλήψεων μιας στοιχειώδους διαδικασίας.

Δ2) Σε κάθε επανάληψη υπάρχουν δύο δυνατά αποτελέσματα

Ε και Α (Α = Ε').

Συνοπτικά: Τα Δ1) και Δ2) ≡ Θεωρούμε n-δοκιμή Bernoulli

Σε ένα τπ τα Δ1) και Δ2) ενδιαφέρει το πλήθος των Ε στις n-επαναλήψεις. Έστω Χ το πλήθος των Ε στις n-επαναλήψεις. Η Χ είναι μία τμ. Οι τιμές της Χ είναι: $x = 0, 1, 2, \dots, n$. Ζητώ την σπ της Χ.

$$P_X(x) \overset{op}{=} P(X = x) = P\left(\begin{matrix}\text{στις n-επαναλήψεις να υπάρχουν}\\ \text{ακριβώς } x\text{Ε και } n-x\text{Α}\end{matrix}\right) =$$

$$= P(\underbrace{EEAA\dots EA}_{xE \text{ και } (n-x)A} \text{ ή } \underbrace{EAAE\dots EA}_{xE \text{ και } (n-x)A} \text{ ή κοκ}) =$$

Καλύπτοντας

$$P(EEAA\dots EA) + P(EAAE\dots EA) + \dots =$$

$$= \left(\begin{matrix}\text{πλήθος}\\ \text{n-αδων}\end{matrix}\right) \cdot P\left(\begin{matrix}\text{Αποτελέσματος (ή n-άδας) που}\\ \text{έχει } x\text{Ε και } (n-x)\text{Α}\end{matrix}\right) =$$

$$= \binom{n}{x\ n-x} P(\text{πx } \underbrace{EEAA\dots EA}_{xE \text{ και } (n-x)A})$$

$$= \binom{n}{x} P(\text{πx } EEAA\dots EA). \quad (*)$$

Δ3) Οι n-επαναλήψεις είναι ανεξάρτητες (η μία δεν επηρεάζει την άλλη).

$$(*) \overset{\Delta 3}{=} \binom{n}{x} \cdot P(E) \cdot P(E) P(A) \cdot P(A) \dots P(E) P(A) \quad (**)$$

Δ4) Η πιθανότητα (Ε) παραμένει αμετάβλητη από επανάληψη σε επανάληψη και ίση με p $(P(E) = p)$.

$$(**) \overset{\Delta 4}{=} \binom{n}{x} (P(E))^{x} (P(A))^{n-x} = \binom{n}{x} p^{x} \cdot (1-p)^{n-x}.$$

- Είναι η $P_X(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$, $p = P(E) \in (0,1)$, $x = 0, 1, \dots, n$ σπ;
Ναι, επειδή:
i) $P_X(x) > 0 \quad \forall x = 0, \dots, n$
ii) $\sum_{x=0}^{n} P_X(x) = 1$

<u>Απόδειξη ii):</u>
$\sum_{x=0}^{n} P_X(x) = \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \overset{\text{Διων Νεύτωνα}}{=} (p + (1-p))^n = 1^n = 1$

- Διωνυμικό τπ: κάθε τπ που πληρεί τα Δ1) - Δ4).

<u>Συνοπτικά:</u> Διωνυμικό τπ είναι κάθε τπ που μπορεί να θεωρηθεί ότι αποτελείται από n-ανεξάρτητες δοκιμές Bernoulli με αμετάβλητη $P(E) = p$, $0 < p < 1$ $(P(A) = 1 - p = q)$

- Διωνυμική τμ: Η τμ που παριστά το πλήθος των E στις n-επαναλήψεις.

- <u>Ορισμός (Διωνυμική Κατανομή):</u> Η τμ X λέγεται διωνυμική με παραμέτρους n και p ($n \in \mathbb{N} - \{0\}$, $0 < p < 1$) αν οι δυνατές τιμές της X είναι $x = 0, 1, 2, \dots, n$ και η σπ της X είναι
$P_X(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$, $q = 1 - p$, $x = 0, 1, 2, \dots, n$

Συμβολικά: $X \sim B(n, p)$ $\left(\begin{array}{c} \text{binomial} \\ = \text{διωνυμική} \end{array}\right)$

Άσκηση:

Ένα ζάρι ρίχνεται 3 φορές.

α) P(να εμφανιστεί άρτιο αποτέλεσμα ακριβώς 3 φορές);

β) P(το πολύ μία φορά άρτιο αποτέλεσμα);

Λύση:

Έστω $E = \{\text{άρτιο αποτέλεσμα}\}$

Έστω X πλήθος των E στις $n=3$ επαναλήψεις.

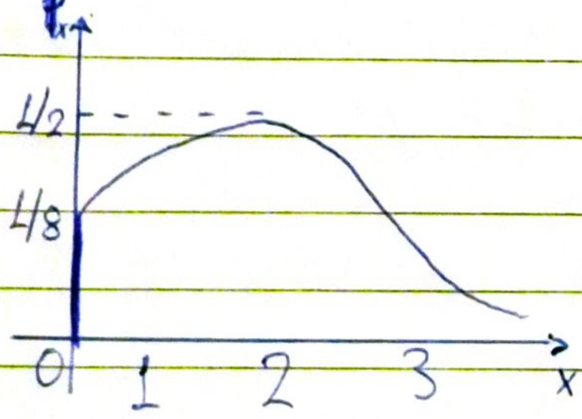
Το X ακολουθεί διωνυμική κατανομή:

$$X \sim B\left(n=3,\ p=P(E)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}\right) \Rightarrow P_X(x)=\binom{3}{x}\left(\frac{1}{2}\right)^{x}\left(\frac{1}{2}\right)^{3-x},\ x=0,1,2,3$$

α) $P(A)=P(X=3)=P_X(3)=\binom{3}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{0}=\frac{1}{8}=0{,}125$

β) $P(B)=P(X\leq 1)=P(X=0 \text{ ή } X=1)=P(X=0)+P(X=1)=$

$=P_X(0)+P_X(1)=\binom{3}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^{0}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{3}+\binom{3}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^{1}\left(\frac{1}{2}\right)^{2}=0{,}5$



Άσκηση:

Έστω ένα τεστ πολλαπλής επιλογής 10 ερωτήσεων. Κάθε ερώτηση $\xrightarrow[\text{αποτυχίες}]{4}$ 1, 2, 3, 4, 5 ← Μία είναι σωστή.

Ένας φοιτητής απαντά στην τύχη και στις 10 ερωτήσεις ανξάρτητα από ερώτηση σε ερώτηση. Αν κάθε σωστή απάντηση βαθμολογείται με μία μονάδα να υπολογισθούν:

α) P(ο φοιτητής να περάσει)

β) P(ο φοιτητής να πάρει 10)

γ) P(ο φοιτητής να πάρει 0)

<u>Λύση:</u>

$n = 10$ επαναλήψεις

$E = \{$ο φοιτητής απαντά σωστά σε 1 ερώτηση$\}$

Αν X το πλήθος των σωστών απαντήσεων, $X \sim B(n=10, p=P(E)=\frac{1}{4})$

Άρα, μοντέλο για $P_X(x) = \binom{10}{x}\left(\frac{1}{4}\right)^x\left(\frac{3}{4}\right)^{10-x}$ $x = 0, 1, \ldots, 10$

α) $P(X \geq 5) = \sum_{x=5}^{10} P(X=x) = \sum_{x=5}^{10} P_X(x) = \sum_{x=5}^{10}\binom{10}{x}\left(\frac{1}{4}\right)^x\left(\frac{3}{4}\right)^{10-x} \simeq 8\%$

β) $P(X=10) = P_X(10) = \binom{10}{10}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{10}\left(\frac{3}{4}\right)^0 \simeq 0$

γ) $P(X=0) = P_X(0) = \binom{10}{0}\left(\frac{1}{4}\right)^0\left(\frac{3}{4}\right)^{10} \simeq 0{,}0163$

<u>Άσκηση</u> (Διωνυμική: Μοντέλο για δειγματοληψίες με επανάθεση):

Έστω m-άνδρες και n-γυναίκες. Εκλέγομε r-άτομα από αυτά το ένα μετά το άλλο με επανάθεση. Ποια είναι η πιθανότητα να έχουν εκλεγεί k-άνδρες στο δείγμα των r $(1 \leq k \leq r)$;

<u>Λύση:</u>

$$\underset{(m+n)}{\underline{1}} \quad \underset{(m+n)}{\underline{2}} \quad \underset{(m+n)}{\underline{3}} \quad \cdots \quad \underset{(m+n)}{\underline{r}}$$

$$\underbrace{\overset{A}{\underset{m}{\underline{1}}} \quad \overset{A}{\underset{m}{\underline{2}}} \quad \overset{A}{\underset{m}{\underline{3}}} \quad \cdots \quad \overset{A}{\underset{m}{\underline{k}}}}_{m^k} \quad \underbrace{\overset{\Gamma}{\underset{n}{\underline{k+1}}} \quad \cdots \quad \overset{\Gamma}{\underset{n}{\underline{r}}}}_{n^{r-k}}$$

Κλασική πιθανότητα:

$$P_{kn} = \frac{m^k \cdot n^{r-k}}{(m+n)^r}$$

Έστω $E = \{\text{επιλέγω άνδρα}\}$
Έστω X πλήθος ανδρών στις r-επαναλήψεις (επιλογές),
$X \sim B\left(r, p = P(E) = \underbrace{\frac{m}{m+n}}_{\text{λόγω επανάθεσης}}\right)$

$P(\text{ακριβώς } k\text{-ανδρών}) = P(X=k) = P_X(k) = \binom{r}{k}\left(\frac{m}{m+n}\right)^k\left(1-\frac{m}{m+n}\right)^{r-k} =$
$= P_{k\pi}.$

Άσκηση (3, φυλλάδιο 2):

α)

Δεδομένα:

- Συμμετείχε άρα έχει τουλάχιστον 1 γιο
- Ο Δ/της έχει 2 παιδιά άρα $S = \{KK, KA, AK, AA\}$

ή $\underset{\substack{\uparrow \\ 2 \\ (A \text{ ή } K)}}{\underline{1^\circ}}$ $\underset{\substack{\uparrow \\ 2 \\ (A \text{ ή } K)}}{\underline{2^\circ}}$ $\Big\} \Rightarrow 4.$

- Συμμετείχαν όσοι έχουν τουλ. 1 γιο, άρα: $S = \{KA, AK, AA\}$.

Συνεπώς ζητούμενη πιθανότητα : $P(A) = \frac{1}{3}$.

β)

Έστω $A_i = \{H\ i\text{-μπάλα να είναι κόκκινη}\}$, $i = 1, 2$

Άρα $P(\text{και οι δύο κόκκινες}) = P(A_1 \cap A_2)$

Συνεπώς, $P(\text{ζητούμενο}) = P(A_1)P(A_2|A_1) = \frac{8}{12}\cdot\frac{7}{11} = \ldots$

γ)

i) $P(A) \overset{\text{ΘΟΠ}}{=\!=} P(A|K_1)P(K_1) + P(A|K_2)P(K_2) = 0{,}4\cdot 0{,}3 + 0{,}2\cdot 0{,}7 = 0{,}26$

ii) $P(K_1|A) \overset{\text{Bayes}}{=\!=} \frac{P(A|K_1)\cdot P(A_K)}{P(A)} = \frac{0{,}4\cdot 0{,}3}{0{,}26}$.